



TITLE:

# 完全流体における自由表面問題の境界要素解析(自由境界問題の数値解析とその周辺)

AUTHOR(S):

登坂, 宣好; 杉野, 隆三郎; 川端, 久善

---

CITATION:

登坂, 宣好 ...[et al]. 完全流体における自由表面問題の境界要素解析(自由境界問題の数値解析とその周辺). 数理解析研究所講究録 1990, 724: 58-86

ISSUE DATE:

1990-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101871>

RIGHT:

# 完全流体における自由表面問題 の境界要素解析

Boundary Element Analysis of Free Surface

Flow of Perfect Fluid

日大生産工 登坂 宣好 (Nobuyoshi Tosaka)

日大生産工 杉野 隆三郎 (Ryuzaburo Sugino)

日大生産工 川端 久善 (Hisayoshi Kawabata)

## Summary

A numerical solution procedure for computing the unsteady irrotational motion of an inviscid and incompressible fluid with a free surface is developed within the boundary element method. The boundary-value problem of Laplace equation is solved by using the boundary integral equation with use of the constant element. The initial-value problem of the free surface conditions which may be regarded as the nonlinear system of first-order ordinary differential equations is integrated by the Euler scheme. This solution procedure is applied to several numerical examples on the sloshing phenomena in rectangular, circular and polygonal containers and nonlinear water wave problems in a tank.

## 1. 序

水が空気と接触して運動を行っている場合には、自由表面と呼ばれるその接触面を求めることが重要になる。一般に各種の分野において見られるこの種の問題は自由表面を有する流れの問題と呼ばれ、具体的には次のような現象が解析の対象となる。

- ・ 加振された容器内の液面振動 (sloshing)。
- ・ 河川、湖水、海洋で発生する水の波に関する現象。  
(例えば、孤立波の発生、伝播、変形)
- ・ 宇宙船や飛行艇の着水衝撃現象および船舶の波浪衝撃現象 (slamming)

ここで上記の具体的な問題について考察することにすれば、対象とする流体を“水”と限定し、完全流体としてモデル化できる。このことより、本論文では自由表面を有する完全流体の流れ問題を解析することにする。

この問題の支配微分方程式は、流体の流れを非圧縮、非回転とすれば速度ポテンシャルが存在しラプラス方程式となる。この支配方程式は線形であるが、流れの状態に応じて変形していく自由表面形状は未知となり、さらに自由表面上で規定される境界条件は非線形となっている。

このため、自由表面問題の解析には差分法や有限要素法な

どの数値計算手法が用いられてきた。これらの手法は、内部領域を離散化するいわゆる領域型解法であり自由表面形状の変化に伴い内部領域の再離散化を必要とする。

一方、境界積分方程式の組織的な離散化手法である境界要素法は、場の支配方程式が線形の場合には境界のみの離散化で良いことになる。従って、本論文で対象とする完全流体の自由表面問題の解析には最適な手法である。この手法によれば、自由表面形状の変化に伴い、境界のみの再離散化を行えば良いことになる。このため完全流体の自由表面問題の解析には境界要素法が多用されるようになり、これまで様々な計算法による研究が発表されている[1]-[8]。

Longuet-Higgins & Cokelet[1]は、境界積分方程式と自由表面上の流体粒子に対するラグランジェ的取扱いとを結びつける手法（これを mixed Eulerian-Lagrangian method と呼んでいる。）を初めて提案した。時間積分スキームは Adams-Bashforth-Moulton スキームを使用し、数値計算に際して生じる "sawtooth" 型数値不安定性 に対し smoothing の手法を導入し、steep surface wave の変形を解析した。その後、この手法が発展したが、特に最近、Dold & Peregrine[2]は水波の overturning 現象を精度良く計算するために Longuet-Higgins & Cokelet の手法を拡張した新しい手法を提案した。場の方

程式を速度ポテンシャルのみならずその高階の導関数に関するラプラス方程式として、その各未知量に対する境界積分方程式を複素変数によるCauchyの積分定理から導いた。この高階の導関数を未知量として導入することにより先の時間積分スキームの代わりに高次のテイラー展開を用いて自由表面上の未知量を計算するのがこの手法の概要である。Nakayama等はこの手法をGreenの積分定理に基づく境界積分方程式を用いて展開し、3次元問題を解析している[5]。

以上、境界要素法による近似解析において様々な近似スキームが存在しているが、使用する境界要素と数値積分スキームの種類に対してどのような数値結果が得られるのか、または上記のような高度の導関数が必要となるのか、といった問題に対する基礎的な考察がなされていない。そこで著者等は、これまで、最も単純な離散スキーム（一定要素およびオイラスキーム）による自由表面問題の近似解析に対する可能性を展開してきた[6] - [9]。本論文は、これまで展開してきた手法およびそれによって得られた各種の数値計算例をまとめて示そうとするものである。

## 2. 数理モデル

閉曲線  $\Gamma$  で囲まれた 2 次元領域  $\Omega$  内の流体の運動を考える。  
 閉曲線による境界  $\Gamma$  は壁境界部分  $\Gamma_w$  と自由表面境界部分  $\Gamma_f$  とで構成されているものとする。(Fig.1 参照)

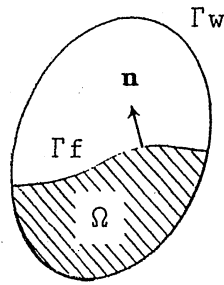


Fig. 1 Geometrical configuration.

ここで対象とする流体は非圧縮性の完全流体とし、その運動を非回転とすると速度ベクトル  $\mathbf{u}(x, y, t)$  は次の Laplace 方程式を満足する速度ポテンシャル  $\phi(x, y, t)$  の勾配  $\nabla \phi$  によって与えられる。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

壁に対する境界条件は、外向き法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \equiv q = \hat{q} \quad (\text{on } \Gamma_w) \quad (2)$$

で与えられる。ただし、 $\hat{q}$  は  $\Gamma_w$  が静止壁の時は 0 となるが、造波問題における造波装置内壁などに対しては 0 ではなく、その移動速度が与えられる。

次に、自由表面における境界条件すなわち自由表面条件として、ここではラグランジュ的表現によって与えられるものを採用する。まず、運動学的条件 (kinematic) は自由表面上の水粒子の座標を  $(\xi, \eta)$  として

$$\frac{D\xi}{Dt} = u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4)$$

で与えられる。ただし、 $D/Dt$  は実質微分作用素を表わす。

動力学的 (dynamic) 条件として Bernoulli 方程式の実質微分による表現を用いて次のように与える。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - g\eta - a\xi \quad (5)$$

ここに、 $g$  は重力加速度、 $a$  は水平加振加速度とする。

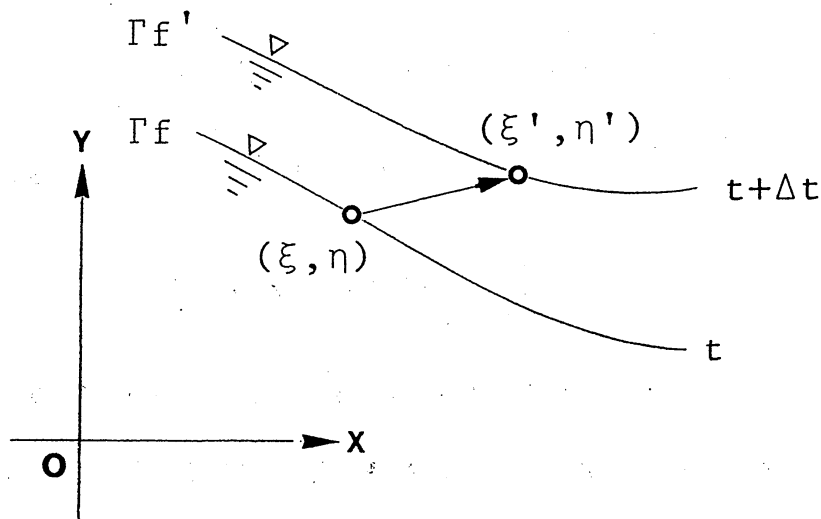


Fig. 2 Movement of Lagrange particle on free surface.

以上によって、対象とする問題の基本微分方程式表現が構成された。このモデルにおいて、場の支配方程式であるラプラス方程式(1)は時間依存性はなく、Neumann条件(2)のもとの境界値問題を構成することができる。一方、自由表面上の境界条件(4)と(5)は自由表面上の水粒子の座標 $(\xi, \eta)$ とポテンシャル $\phi$ に対する時間に関する1階連立微分方程式によって与えられている。従って、未知関数 $\xi, \eta, \phi$ の初期値を与えることによって $\xi, \eta, \phi$ に関する初期値問題を構成する。このような数理モデルに対する境界要素法による近似解析手法を次章で展開する。

### 3. 境界値問題の境界要素解析

ラプラス方程式(1)を境界条件(2)のもとで境界積分方程式によって解くことを考える。

式(1)の境界積分方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2\pi} \phi(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma_f} \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \omega^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_w} \hat{q}(\mathbf{x}) \omega^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & - \int_{\Gamma_f+w} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $\alpha/2\pi$ は境界形状に依存する形状係数を表わしており、 $\omega^*$ はラプラシアンの基本解として次式で与えられる。

$$\omega^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{r}, \quad r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (7)$$

ここで、式(6)中の未知量は境界上の $\phi$ および $\partial \phi / \partial n$ であ



る。これらの未知量を式(6)によってuniqueに定めるためには、Neumann条件(2)のみならず、Dirichlet条件を与えなければならない。このようなDirichlet条件として自由表面上の $\phi$ を与えるものとする。

境界積分方程式(6)を近似的に解くために、境界上の未知量に対し最も簡単な一定要素スキームを導入する。その結果、式(6)は次のような節点未知ベクトル  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}^T$  と  $Q = \{q_1, \dots, q_n\}^T$ , ( $q_i = \partial \phi_i / \partial n$ )に関する連立1次代数方程式となる。

$$H \Phi = G Q \quad (8)$$

ただし、上式の係数行列は第*i*番目の節点  $x_i$  から第*j*番目の境界 segment  $e_j$  に対する基本解の積分によって次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} H &= [\hat{H}_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}] \\ \hat{H} &= [\hat{H}_{ij}] = \frac{1}{2\pi} \int_{e_j} \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{\|x-x_i\|} \right) d\Gamma(x) \\ G &= [G_{ij}] = \frac{1}{2\pi} \int_{e_j} \ln \frac{1}{\|x-x_i\|} d\Gamma(x) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

## 4. 初期値問題の近似解析

第2章で与えられた自由表面条件(3)～(5)をまとめて示すと次のような発展型微分方程式表現となる。

$$\frac{D}{Dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - g\eta - a\xi \end{bmatrix} \quad (10)$$

この発展型微分方程式を近似的に解くことを考える。この式の時間積分を実行すると、あらかじめ与えられた $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\phi$ の初期値に対し、ある時間経過後の $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\phi$ の値を決定することができる。そのための時間積分スキームとしては種々のものが知られている。例えば、文献[1]においてはAdams-Bashforth-Moultonスキームを使用している。

本論文では、時間積分スキームとして最も簡単なオイラースキームを使用する。このスキームを採用すると、連立1階常微分方程式(10)は $k$ 時間ステップにおける右辺の値を用いて $(k+1)$ 時間ステップにおける未知量を次のように与えることになる。

$$\xi^{k+1} = \xi^k + \Delta t \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^k, \quad \eta^{k+1} = \eta^k + \Delta t \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^k \quad (11)$$

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \Delta t \left( \frac{D\phi}{Dt} \right)^k \quad (12)$$

ただし、上つき添え字  $k, k+1$  は時間ステップを表わすものとする。

## 5. 数値計算手法

問題の数値モデルに対し、場の方程式の境界値問題を一定による境界要素法、さらに自由表面条件の初期値問題をオイラー法によって解くことを考えてきた。ここでは、これらの手法に基づく有効な数値計算手法を展開する。

時間ステップ  $k$  での  $\phi, D\phi/Dt, \partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y$  を式 (12) に代入すると時間増分  $\Delta t$  後の水粒子の持つ速度ポテンシャルを近似することができる。 $D\phi/Dt$  は式 (5) を用いて与えられる。いま、自由表面形状の変化をラグランジュ的に観測するために直線要素によって離散化された自由表面上に水粒子を想定する。ところが、本論では境界要素として一定要素を用いるので粒子は要素の節点ではなくメッシュポイント上に置かれている (Fig. 3 参照)。そこで、直線要素上の中央に定義された節点に与えるポテンシャル値を次式で評価する。

$$\phi_j^{k+1} = \frac{1}{2} (\phi_i^{k+1} + \phi_{i+1}^{k+1}) \quad (13)$$

ここに、添え字 " $k$ " は時間ステップ  $k\Delta t$  であり、 $i, j$  はそれぞれメッシュポイント番号と要素 (節点) 番号を表わす。

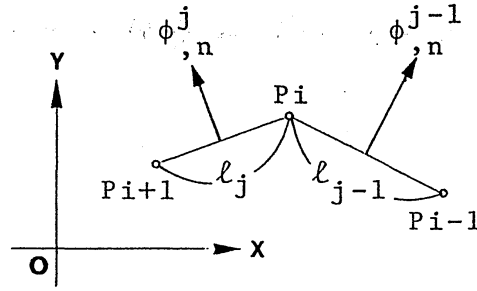


Fig. 3 Derivatives on constant element.

この式 (13) に式 (12) で求めた値を代入すると自由境界  $\Gamma_f$  での Dirichlet 条件が準備できる。この Dirichlet 条件を境界積分方程式 (6) に与えて解くと自由境界  $\Gamma_f$  上でのフラックス値  $(\partial \phi / \partial n)$  を得る。

次に、このフラックス値から水粒子の持つ法線方向の速度ベクトルを次の近似式で計算する。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_i^{k+1} = \frac{l_j}{l_{j-1} + l_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_{j-1}^{k+1} + \frac{l_{j-1}}{l_{j-1} + l_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_j^{k+1} \quad (14)$$

一方、接線方向の速度ベクトルは次式を用いる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)_i^{k+1} &= \frac{l_j}{l_{j-1} + l_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)_{j-1}^{k+1} + \frac{l_{j-1}}{l_{j-1} + l_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)_j^{k+1} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)_j^{k+1} &= \frac{\phi_{i+1}^{k+1} - \phi_i^{k+1}}{l_j} \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 $l_j$  は  $j$  番目の直線要素の長さを表わす。(Fig. 3 参照)

このようにして得られた水粒子の法線および接線方向の速度ベクトルを次の幾何学的関係を用いて  $x - y$  座標系に変換する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial n} \cos(n, x) + \frac{\partial \phi}{\partial s} \cos(s, x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial n} \cos(n, y) + \frac{\partial \phi}{\partial s} \cos(s, y) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに、 $\cos(n, x)$ と $\cos(n, y)$ 、 $\cos(s, x)$ と $\cos(s, y)$ はそれぞれ自由表面上の外向き単位法線および接線ベクトルの $x$ 軸と $y$ 軸に対する方向余弦である。式(16)より水粒子の $x-y$ 座標系での速度成分が得られる。

式(16)で求めた値を式(11)に代入すると、水粒子の時間刻み $\Delta t$ 後の新しい座標値が得られる。この計算を自由表面上に置かれた全ての水粒子について行えば1ステップ後の自由表面の形状を決定できる。

以上の手順を繰り返すことで任意の時刻までの自由表面形状の変化をシミュレートすることができる。

## 6. 数値計算例

ここでは、いままで展開してきた計算手法を用いて具体的なモデルについて数値シミュレーションを試みる。解析モデルとして、水平加振を受ける矩形容器、円形容器および多角形容器内の流体の運動、矩形水槽内での孤立波の造波問題、孤立波の急斜面への反射問題そして孤立波の砕波問題の6つを選び、種々のパラメータに対する自由表面形状の時間および空間的变化についての数値計算結果を示す。

### 6. 1 水平加振を受ける矩形容器内流体の運動

Fig. 4にあるような幅  $L = 0.9(\text{m})$  の2次元矩形容器に高さ  $H = 0.6(\text{m})$  まで流体を満たし、水平方向に加振する。加振加速度  $a(t)$  は振幅  $A$  と振動数  $\omega$  をパラメータとして次のように与える。

$$a(t) = A\omega^2 \sin(\omega t) \quad \text{for } t \geq 0 \quad (17)$$

この  $a(t)$  を式(5)の  $\xi$  の係数として代入することで外力を与えることができる。

時刻  $t=0$  において流体は完全に静止しているものとする、初期条件は次のように与えられる。

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

要素分割は自由表面、左右の側壁そして底面をそれぞれ10分割とした計40分割とした。

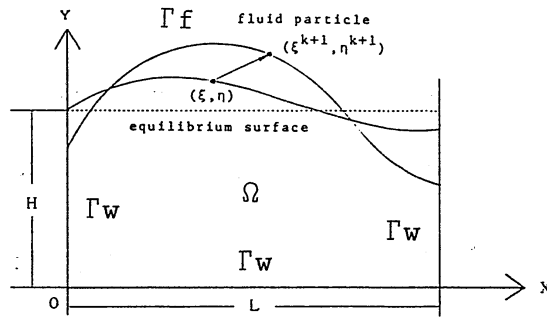


Fig. 4 Free surface motion in rectangular container.

c a s e ( A )

式(17)のパラメータを、 $A = 2.0(\text{mm})$ ,  $\omega = 5.5(\text{rad/sec})$ , とし、 $\Delta t = 0.01(\text{sec})$ に選んだ場合の自由表面形状の変化を奥行

きを時間軸として模式的に3次元表現したものがFig.5である。

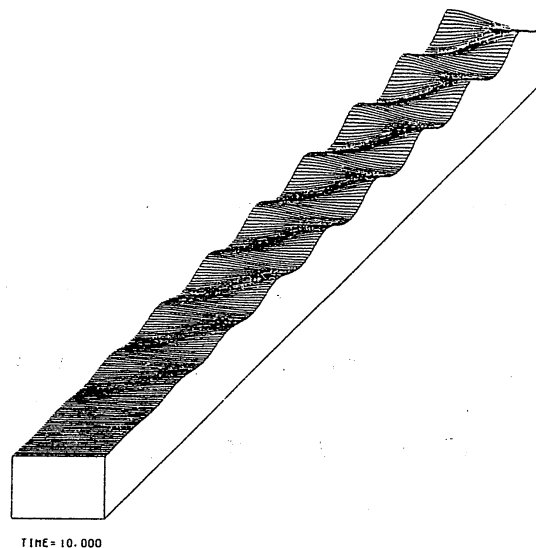


Fig. 5 Growth of slosh of free surface.

Fig.5を見ると、静水面から出発した水面が徐々に振動を始めて一定の振幅に近づいていくのがわかる。

Fig.6では右側壁に接している水面の静水面Hからの垂直変位  $\eta(x, t)$  について時間変化をプロットしたものである。

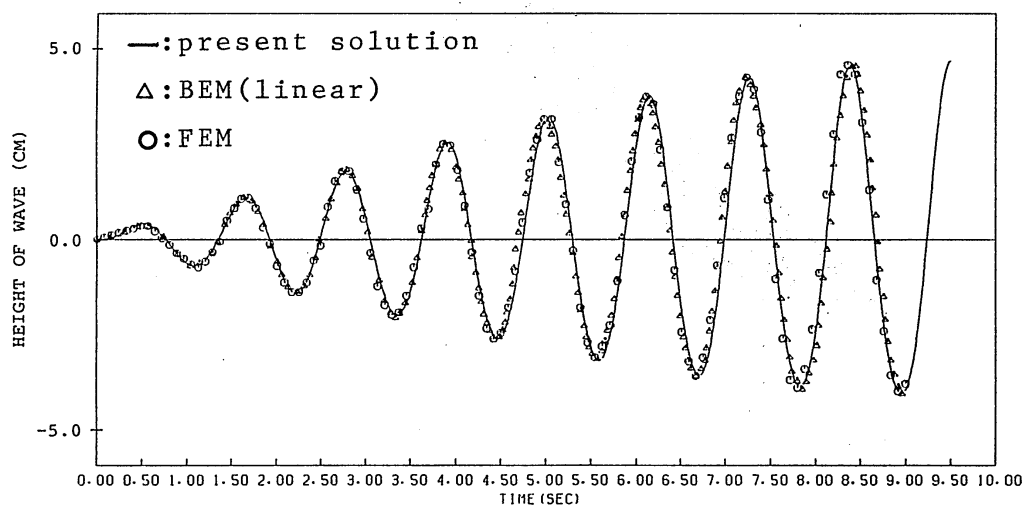


Fig. 6 Comparison of time histories of  $\eta$ .

Fig. 6では他の数値計算結果と比較しているが、F E M [10]や一次要素によるB E M [4]の結果とよく一致しているのがわかる。

#### c a s e ( B )

次に、さらに大きな加振加速度を与えて水面が大振幅を起こす場合について計算してみる。式(17)の外力のパラメータを、 $A = 7.0 (\text{mm})$ ,  $\omega = 5.5 (\text{rad/sec})$ , 時間刻み  $\Delta t = 0.002 (\text{sec})$  に選んだ場合の水面の形状を描いたものがFig. 7である。

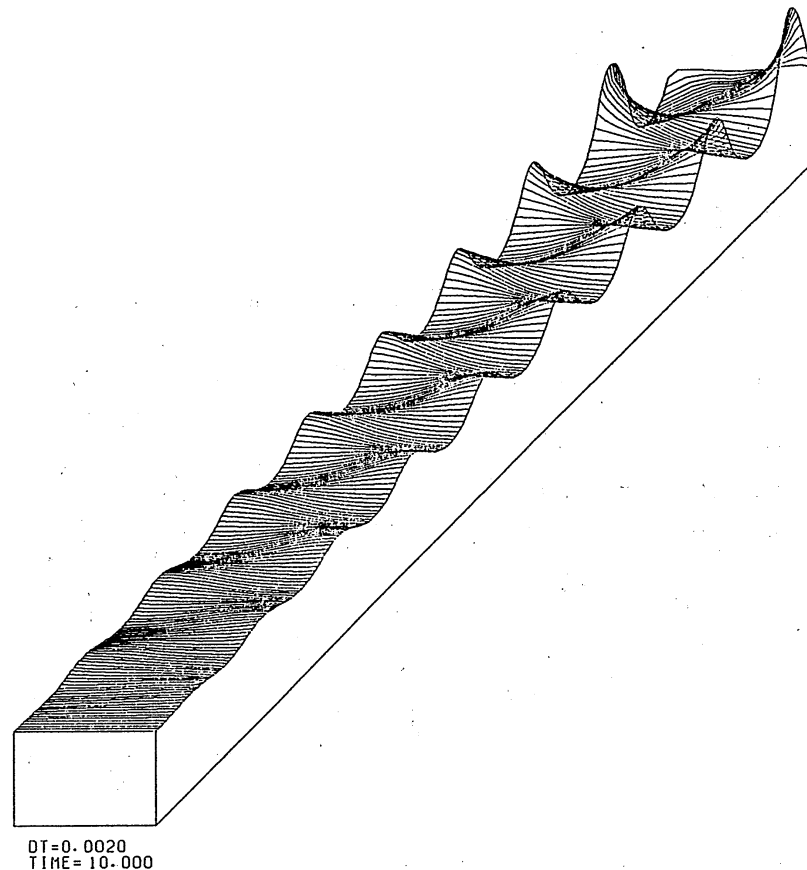


Fig. 7 Large amplitude of liquid surface..



Fig. 7の水面の両端点における垂直変位について時刻歴応答を Fig. 8に示す。

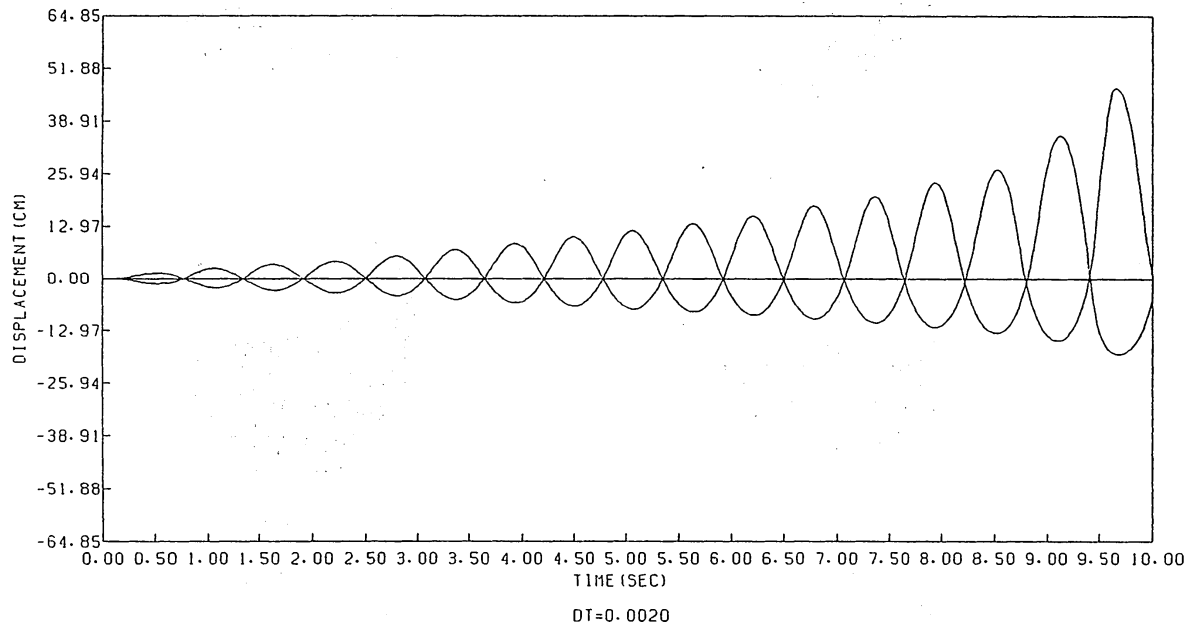


Fig. 8 Time histories of  $\eta(x, t)$  ( $x=0, L$ ).

Fig. 8を見ると徐々に振幅が成長して約 0.5 (m)の高さに至っている。平衡水面から上の振幅が下の振幅よりも大きくなっており、水面運動の非線形応答がよく表われている。

## 6. 2 水平加振を受ける円形容器内流体の運動

半径  $R=0.5$  (m) の円形容器にその半分のところまで流体を満たし、式 (17) において  $A=10.0$  (mm),  $\omega=5.0$  (rad/sec) をパラメータに選択して外力を与える。要素分割は自由表面が 20 分割、流体が容器に接触している部分を 20 分割として計 40 分割とする。時間刻みは  $\Delta t=0.002$  (sec) としている。得られた計算結果を Fig. 9 に示す。

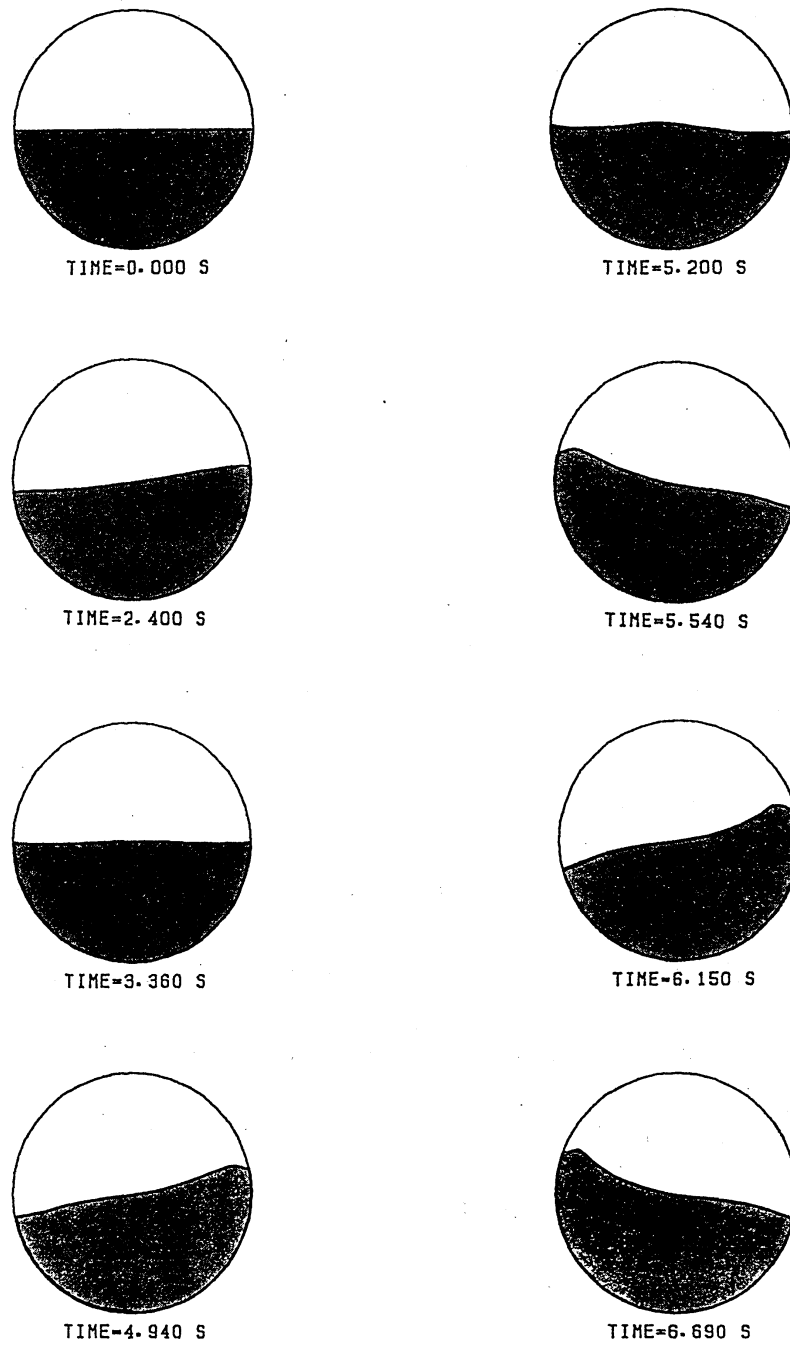


Fig. 9 Free surface motion in circular container.

Fig. 9を見ると、水面の運動が大きくなると容器近傍での水面にリップルと呼ばれる小さな隆起が発生しているのがわかる。これは、円形容器を水平方向に比較的大きな振幅、低振動数で振動させた場合に現われる界面変動である。

### 6. 3 水平加振を受ける多角形容器内流体の運動

Fig. 10にある多角形容器を考える。  $A=1.05(\text{m})$ ,  $B=0.45(\text{m})$ ,  $C=0.605(\text{m})$ ,  $L=1.0(\text{m})$ として高さ  $H=1.0(\text{m})$ まで流体を満たし式(17)において  $A=12.5(\text{cm})$ ,  $\omega = 2\pi / 1.75(\text{rad/sec})$ の外力を与える。時間刻み  $\Delta t=0.002(\text{sec})$ とし、要素分割は自由表面12分割、左側壁6分割、右側壁6分割そして底面6分割の計30分割とする。

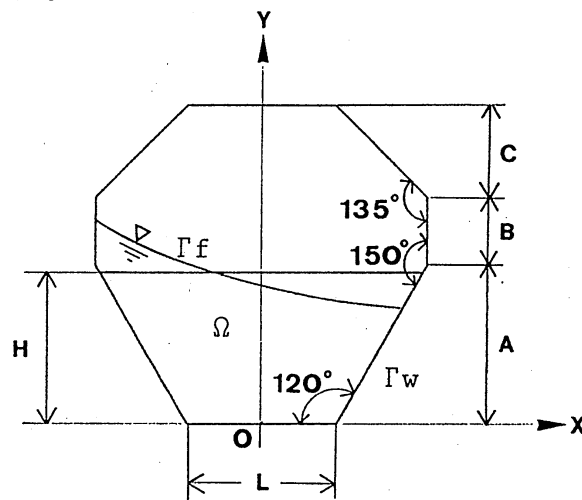


Fig. 10 Configuration of polygonal container.

本計算では、仮想粘性  $\mu$  を考慮するために式(5)の代わりに

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - g\eta - a\xi - \mu\phi \quad (19)$$

を用いることにし、 $\mu = 0.01$ を与える。

なお、本計算では容器内の流体が占める volume をチェックして境界要素分割メッシュをオプティマイズするアダプティブメッシュ生成法[9]を用いている。

Fig. 11に各時間において得られた自由表面形状を示す。

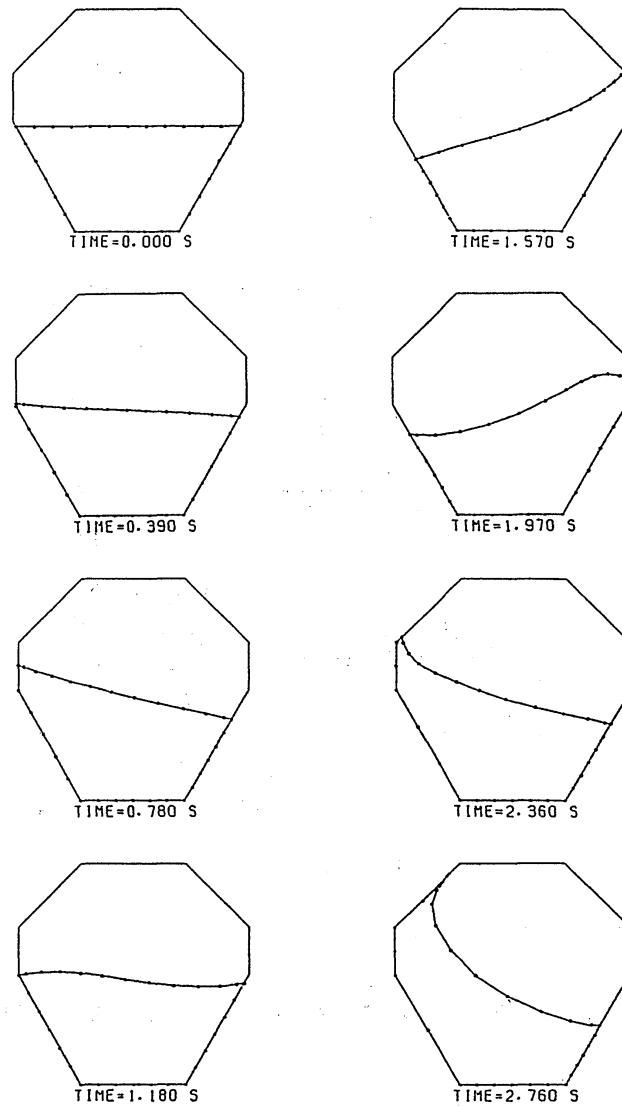


Fig. 11 Boundary element configuration.

Fig. 11を見ると、静水面から水面の変動が大きくなり最後には天井付近に水面が駆け上がっているのが分かる。なおここで得られた結果は、ナヴィエ・ストークス方程式を対象としたFEMの結果[11]と良い一致を示している。

#### 6. 4 矩形水槽内での孤立波の造波問題

Fig. 12にある2次元矩形水槽内での孤立波の発生、伝播そして反射を考える。水槽の左端に造波装置としてピストンを設定する。解析領域 $\Omega$ は自由表面 $\Gamma_F$ 、ピストン内壁 $\Gamma_{W1}$ 、底面 $\Gamma_{W2}$ そして右側面 $\Gamma_{W3}$ で囲まれているものとする。そして、水槽の幅を無次元化長さ $L=18.0$ とし、底面から静止水面までの高さ $h=1.0$ とする。

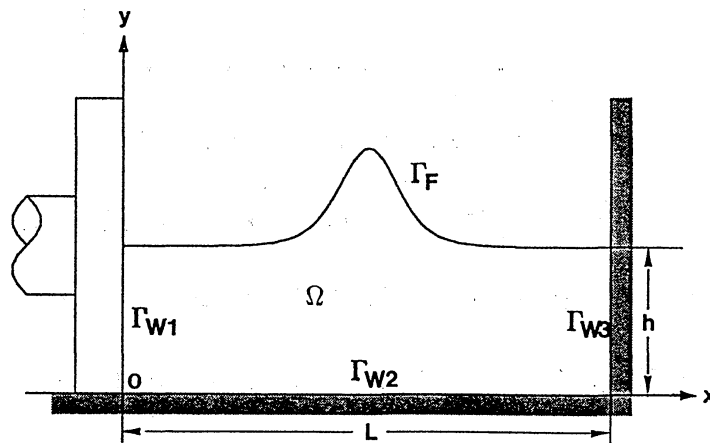


Fig. 12 The water tank and wave generator.

境界 $\Gamma_{W1}$ に対する境界条件を次のように与える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = - \frac{dX_p}{dt} \quad (\text{on } \Gamma_{W1}) \quad (20)$$

ここで、 $X_p(t)$ はピストンの変位を表わす関数であり、ピストンは次の関数に従って移動するものとする。

$$X_p(t) = X_0 \tanh[\omega(t-t_c)] \quad \text{for } 0 \leq t \leq T \quad (21)$$

ここに、 $X_0$ はピストンの半行程を表わし、 $T$ はピストンが停止する時刻であり、 $\omega$ 、 $t_c$ はピストンの動きを特徴づけるパラメータである。

要素分割は Fig. 13 のように全境界を一定要素を用いて 80 分割し、そのうち自由表面を 50 分割する。式 (21) を用いてピストンを挿入していくが、パラメータおよび時間刻みは無次元化量で  $X_0 = 0.6$ ,  $\omega = 0.4$ ,  $t_c = 5.0$ ,  $T = 12.0$ ,  $\Delta t = 0.02$  のように与える。

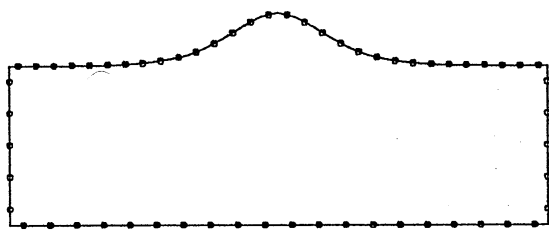


Fig. 13 Boundary element mesh of water tank.

Fig. 14 に孤立波の発生から伝播そして反射の過程を横軸と縦軸に無次元化座標  $X/h$ ,  $Y/h$  そして奥行きを無次元化時間として自由表面形状の変化を示したものである。

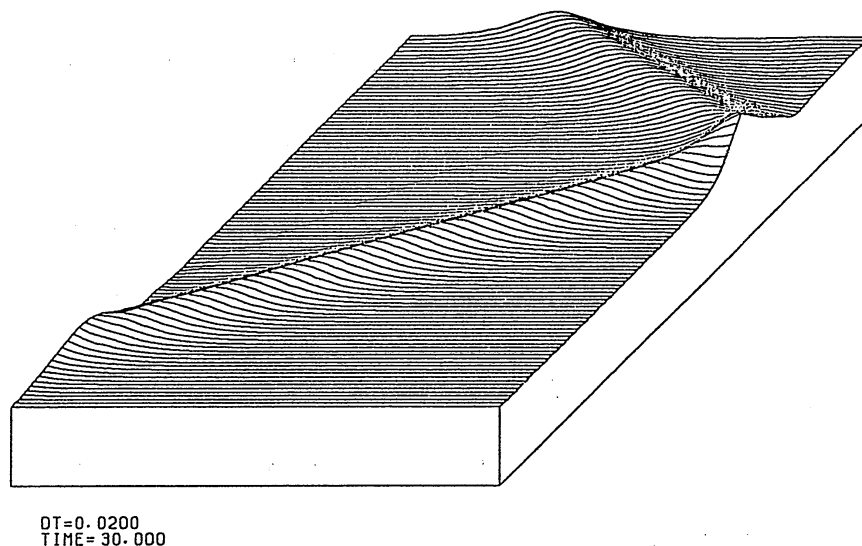


Fig. 14 Profiles of a solitary wave.

Fig. 15はFig. 14で示した計算結果を発生、伝播と駆け上がり、そして反射という3つの相に分けてより詳しく示したものである。ただし、縦軸は自由表面の静水面からの無次元化変位であり横軸はピストン内壁の位置である。

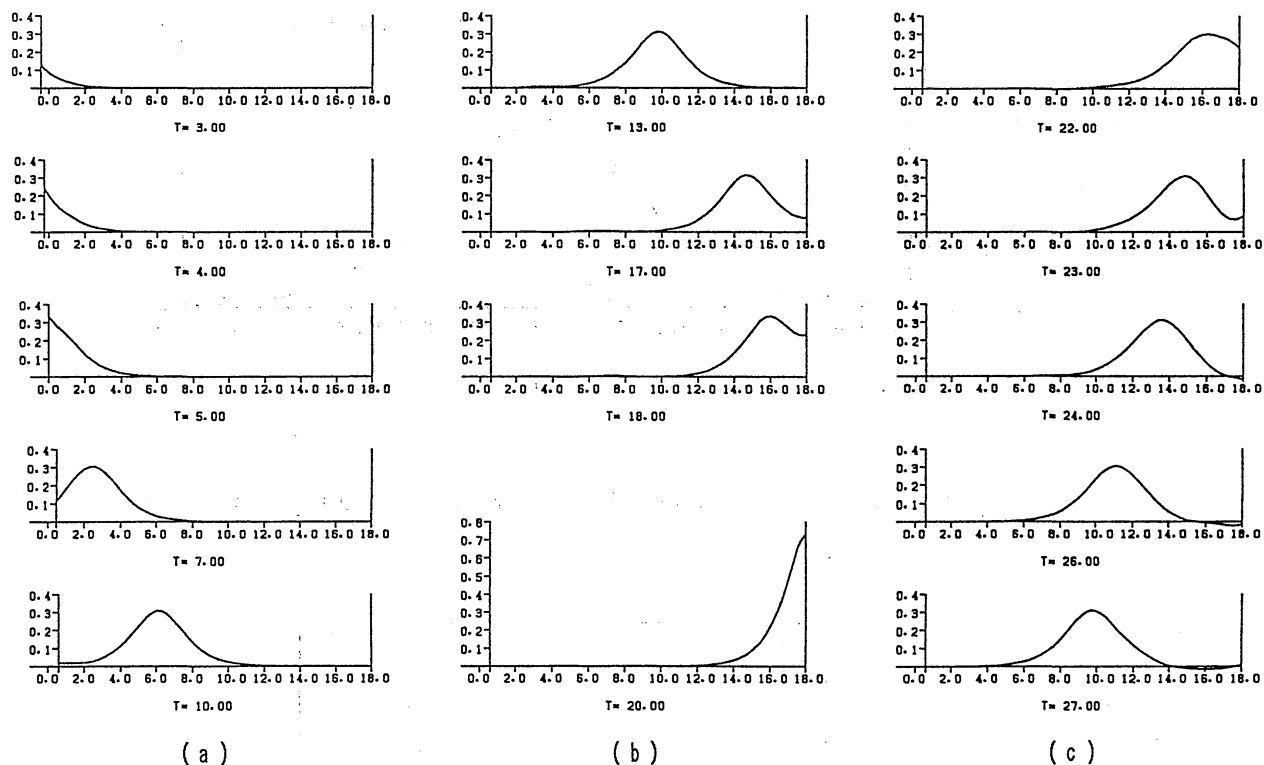


Fig. 15 Three phases of the motion of a solitary wave.  
 (a) generation ; (b) propagation and run-up ;  
 (c) reflection

Fig. 16はFig. 15の時刻  $t\sqrt{g/h}=13.0$  で得られた孤立波の形状を非線形浅水長波方程式の特解として知られるブシュネスクの理論解[12]と比較したものである。

Fig. 17は孤立波の駆け上がりの最大高さ  $R/h$  を波高  $A/h$  に対してプロットしたものである。本手法による計算結果と一次

要素による境界要素解 [3] および実験データ [13]とを比較したものである。実線は近似理論解 [14]を示している。

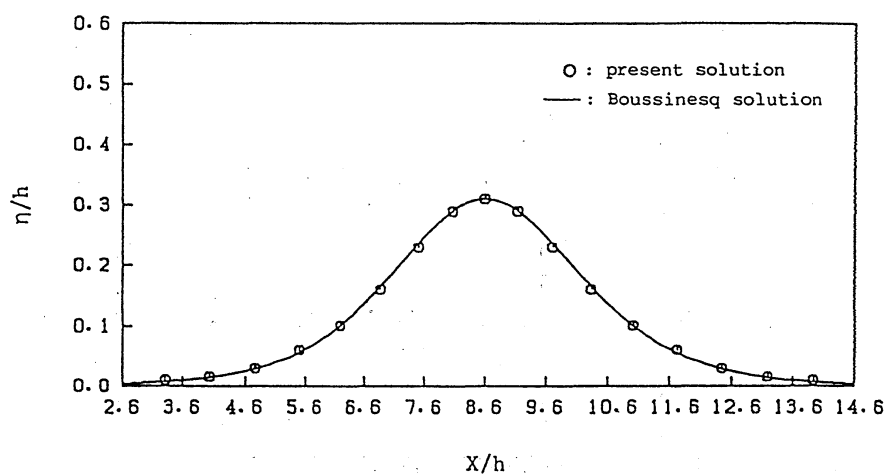


Fig. 16 Comparison of the computed wave profiles.

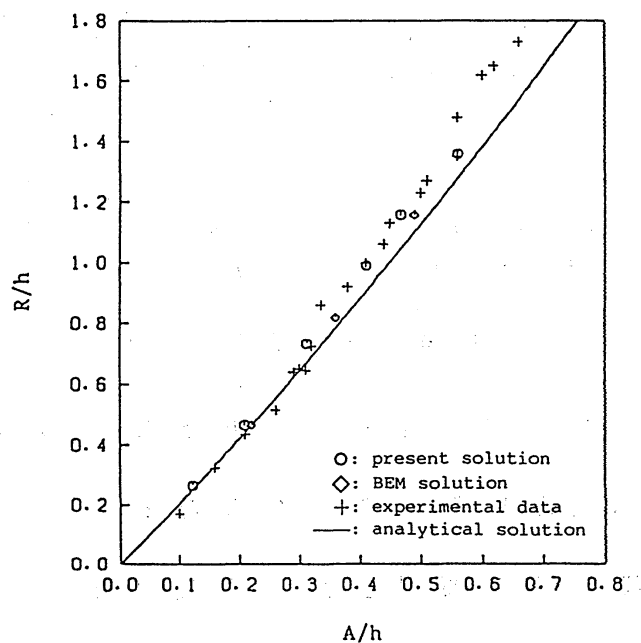


Fig. 17 Maximum height  $R/h$  of run-up with the wave height  $A/h$ .



## 6. 5 孤立波の急斜面に対する反射問題

先の矩形水槽の右側壁  $\Gamma_{w3}$  を任意の角度  $\theta$  に傾けた場合の急斜面に対する孤立波の駆け上がりと反射をシミュレーションする。データを揃えるためにディメンジョンとピストン移動のパラメータは前節と同じにする。ただし、 $\Gamma_{w3}$  の要素分割は10分割とし、総分割数85で計算する。

Fig. 18は斜面角度  $\theta = 45^\circ$  の場合における孤立波の発生、伝播、駆け上がりそして反射の過程を示したものである。

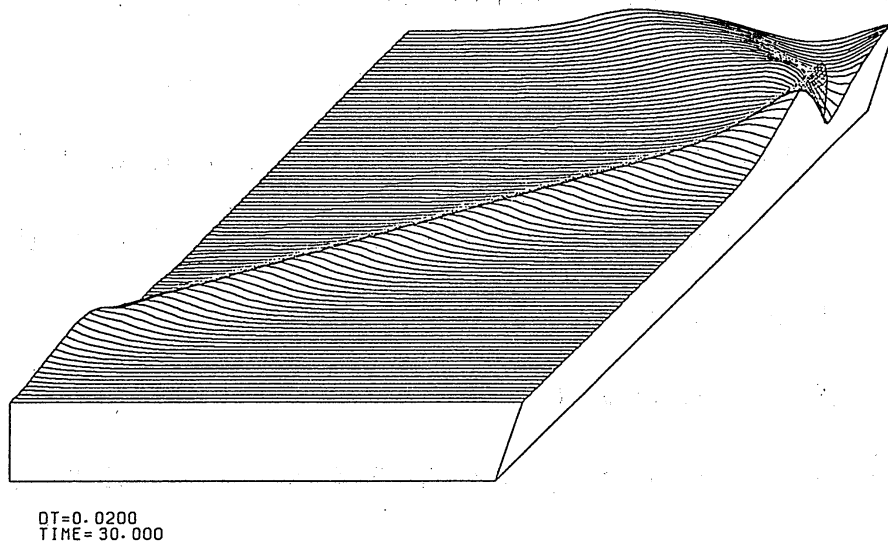


Fig. 18 Generation, propagation and reflection of solitary wave on steep slope ( $\theta = 45^\circ$ ).

Fig. 19は斜面角度  $\theta = 30^\circ$  の場合における孤立波の発生、伝播、駆け上がりそして反射の過程を示したものである。

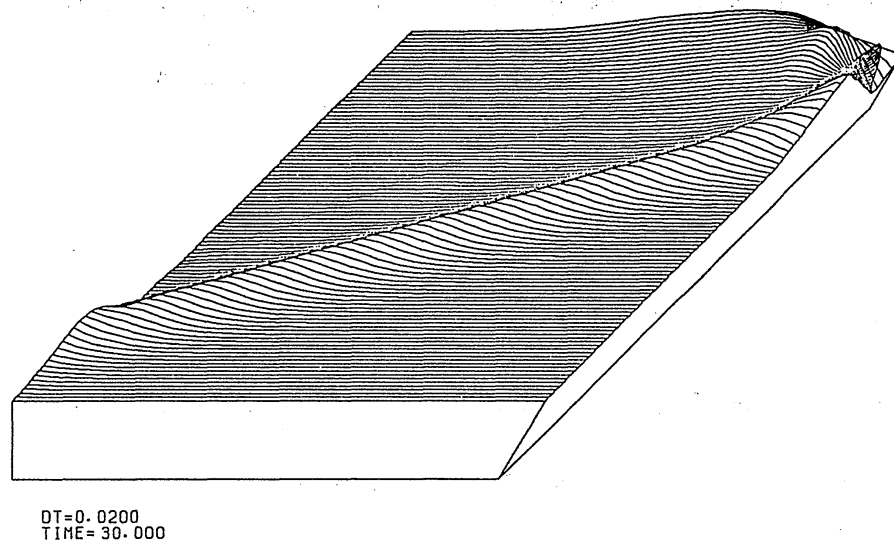


Fig. 19 Generation, propagation and reflection  
solitary wave on steep slope ( $\theta = 30^\circ$ ).

Fig. 18とFig. 19をFig. 14と比較すると斜面の角度が浅くなるに従って、駆け上がりの最高点に達した後の水面の変形が複雑になるのがわかる。

## 6. 6 孤立波の碎波問題

前節の斜面の傾斜をさらにゆるやかにした緩斜面を孤立波が遡上するときの水面の変形をシミュレーションする。水槽のディメンジョンは  $L=10.0$  (m),  $h=1.0$  (m) として、斜面の傾斜  $1/M$  は  $M=20$  と  $M=10$  の2つのケースを選んだ。要素分割は自由表面以外を  $\Gamma_{w1}=5$ ,  $\Gamma_{w2}=20$ ,  $\Gamma_{w3}=35$  に固定し、 $\Gamma_f$  の分割数は傾斜に応じて決める。時間刻みは  $\Delta t=0.02$  (sec) とする。

Fig. 20は  $M=20$  の斜面上で波高  $0.58\text{ (m)}$  の孤立波が砕波に至る過程を  $0.02$  秒毎に  $6.80$  秒から  $6.98$  秒まで作画したものである。自由表面の分割数は  $180$  分割である。

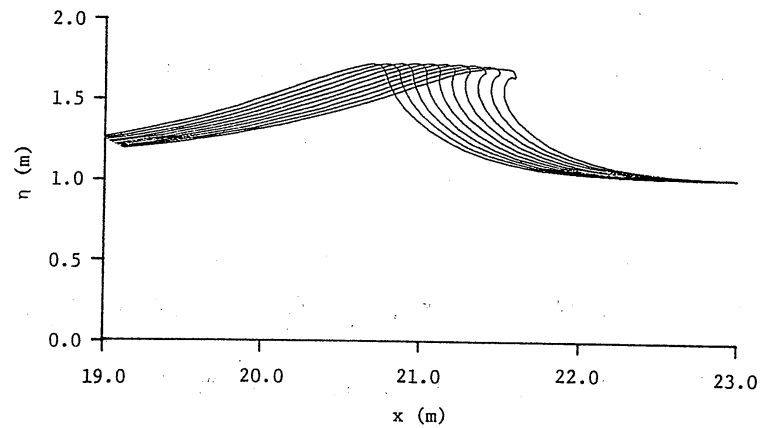


Fig. 20 Deformation of solitary wave on  $1/20$  slope.

Fig. 21は  $M=10$  の斜面上で波高  $0.58\text{ (m)}$  の孤立波が砕波に至る過程を  $0.04$  秒毎に  $6.02$  秒から  $6.38$  秒まで作画したものである。自由表面の分割数は  $200$  分割である。

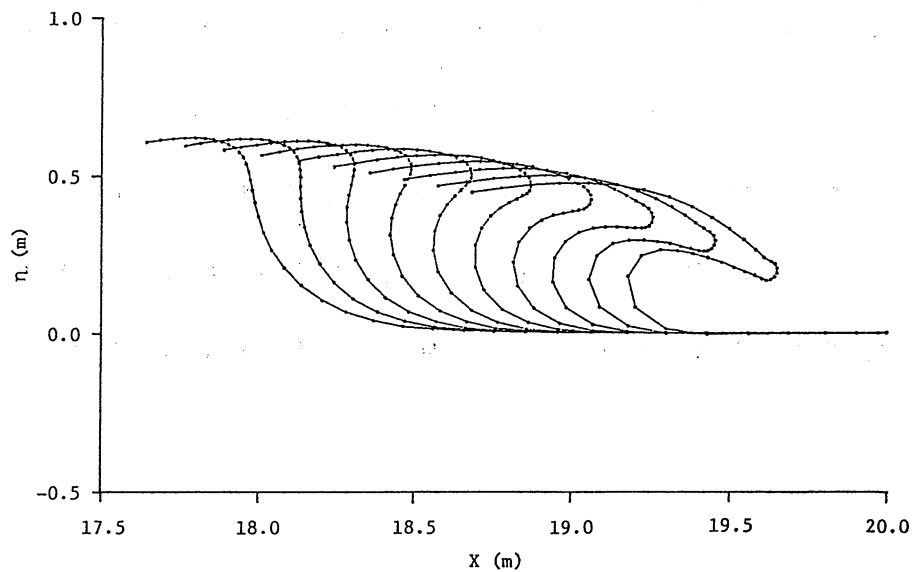


Fig. 21 Deformation of solitary wave on  $1/10$  slope.

Fig. 20は孤立波の波頭が崩れるところをクローズアップしたものであるが、頭をもたげた波の頂上がジェット状になって飛び出していくのがわかる。

Fig. 21では、波頭がさらに大きなジェットになって飛び出しており斜面の傾斜に応じて碎波に至る水面の変形の相が変わる現象が捉えられていることが分かる。

## 7 結語

以上、本論文では自由表面を有する完全流体の運動の数値計算手法として発展している境界要素法とラグランジェ粒子追跡法を結びつけた方法に対する基礎的な考察を示した。ここでは、最も簡単な一定要素による境界積分方程式の離散化とオイラー法による時間積分という単純なスキームによる問題の適用性を追求を行ってきた。特に、境界要素として一定要素を用いたことにより、線形要素による境界要素解析でしばしば問題となる角点の問題に対して特別な工夫をプログラムに施す必要がないことから3次元問題への適用が容易であることが期待される。今後は、この基礎的な考察をもとにしてより精度の良いスキームの開発を続けて行きたい。

## 参考文献

- [1] Longuet - Higgins, M. S. and Cokelet, E. D. : The deformation of steep surface waves on water I - A numerical method of computation, Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 350, pp. 1-26, 1976
- [2] Dold, L. W. and D. H. Peregrine : Steep unsteady water waves - An efficient computational scheme, Proc. 19th. Coastal. Engng. Conf, Houston, Texas, Vol. 1, pp. 955-967, 1984
- [3] Nakayama, T. : Boundary element analysis of nonlinear water wave problems, Int. J. Num. Mech. Engng. 19 (1983), pp. 935-970
- [4] Nakayama, T. and Washizu, K. : Boundary element analysis of non - linear sloshing problems, Developments in Boundary Element Method-3 (Eds. P. K. Banerjee and S. Mukherjee). Elsevier Applied Science Publishers co. LTD, 1984, pp. 191-202
- [5] 田中宏明, 中山司 : 3次元円筒形貯槽内の大振幅スロッシング現象の数値解析, 第3回計算力学シンポジウム, (1989), pp. 241-245
- [6] Sugino, R. and Tosaka, N. : Solution procedure for nonlinear free surface problems by boundary element approach, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 38, University of Tokyo Press, 1989, pp. 53-59
- [7] Sugino, R. and Tosaka, N. : Boundary element analysis of non-linear free surface problems, Proc. Int. Symp. CFD, Nagaya, pp. 855-860, 1989
- [8] Tosaka, N. , Sugino, R. and Kawabata, H. : Boundary element-Lagrangian solution method for nonlinear free surface problems, Int. Symp. on BEM, 1989 (in press)
- [9] Sugino, R. and N. Tosaka : Large amplitude sloshing analysis in a container with multi-slopped wall by boundary element method, Proceedings of JAPAN/USA BOUNDARY ELEMENT SYMPOSIUM, June 1990, ( to appear )
- [10] Ikegawa, M. : Finite element analysis of fluid motion in a container, Finite Element Methods in flow Problems ( Eds. J. T. Oden et al ), UAH Press, Huntsville, Alabama, pp. 855-860, 1974

- [11] Okamoto, T. and Kawahara, M. : Large amplitude sloshing analysis in a multi-sloped wall boundary container by finite element method, Proc. Int. Symp. CFD. Nagoya, pp. 977-982, 1989
- [12] Mehaute, B. L: An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves, Springer-Verlag, 1976
- [13] Chamfield, F. E and R. L. Street. : An investigation of the deformation and breaking of solitary waves, Dept. Civil. Engng. Technical report , 81 , Stanford Univ, 1967
- [14] Byatt - Smith, J. G. B. : An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation, J. Fluid. Mech. , 49, 625-633, 1971